數學傳播 43卷2期, pp. 27-34

Muirhead 不等式(齊次對稱不等式) 三元之輪換形分割 (上)

吳建生

I. 主旨:

(一) 介紹 Muirhead 不等式。

(二) 探討它三元之兩種分割:

(1) 對稱輪換不等式 (P 型)。
例如 $a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a.$

(2) 輪換不等式 (Q 型)
例如 $a^5b^3c+b^5c^3a+c^5a^3b\geq a^4b^3c^2+b^4c^3a^2+c^4a^3b^2$
※ 輪換式指具輪序之非對稱式。

(三) 共五大分割定理 A, B, C, D, E, 而一以貫之, 最後總結成本定理。

(四) 最後作三元分割之綜合分析。

(五) 附件爲推廣之三列的排序不等式。

II. 內容:

(一) Muirhead 不等式:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\geq(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\Rightarrow\sum(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\geq\sum(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$$

§1: 敘述說明:

(1) 兩實數列 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$
若滿足

(a) $\alpha_i\geq\alpha_j$, $\beta_i\geq\beta_j$, $\forall\ i<j$.

(b) $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i$.

(c) $\sum\limits_{i=1}^{K}\alpha_i\geq\sum\limits_{i=1}^{K}\beta_i,\ \forall\ 1\leq K\leq n$.

則 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\geq(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$。

(2) 齊次對稱式 $\sum x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ 記為 $\sum(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ (係數和 $n!$, $x_i\geq 0,\ \forall\ i$)

例如 $\sum(3,2,1)=a^3(b^2c+c^2b)+b^3(a^2c+c^2a)+c^3(a^2b+b^2a)$.

$\sum(4,0,0)=2(a^4+b^4+c^4)$.

$\sum(2,2,2)=6a^2b^2c^2$.

(3) $\because(3,0,0)\geq(2,1,0)\quad\therefore\sum(3,0,0)\geq\sum(2,1,0)$.

即 $2(a^3+b^3+c^3)\geq(a^2b+b^2c+c^2a)+(a^2c+c^2b+b^2a)$.

§2: 證明請查 Hardy 著 *Inequility* 或高中數學電子報網站 67 期本人之文章。

(二) Muirhead 不等式三元之分割

(1) 如 $\sum(3,0,0)\geq\sum(2,1,0)$ 可分割成

$$\begin{cases}a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a\\ a^3+b^3+c^3\geq a^2c+c^2b+b^2a.\end{cases}\qquad\text{(P型)}$$

(2) 如 $\sum(5,3,1)\geq\sum(4,3,2)$ 可分割成

$$\begin{cases}a^5b^3c+b^5c^3a+c^5a^3b\geq a^4b^3c^2+b^4c^3a^2+c^4a^3b^2\\ a^5c^3b+b^5a^3c+c^5b^3a\geq a^4c^3b^2+b^4a^3c^2+c^4b^3a^2.\end{cases}\qquad\text{(Q型)}$$

※ 其他分割, 例如 $\sum(5,3,0)\geq\sum(5,2,1)$ 可分割成三式, 之一為 $a^5(b^3+c^3)\geq a^5(b^2c+c^2b)$ 則不在本文探討範圍內。

※ 本文只討論三元, 其實四元以上分割概念會更清晰。

※ 以下 $X>Y>Z\geq 0$

(三) 分割定理:

定理 A: $\sum(X+Y,0,0)\geq\sum(X,Y,0)$ $(Y>0)$ 可分割 (P 型), 即

$$a^{X+Y}+b^{X+Y}+c^{X+Y}\geq a^Xb^Y+b^Xc^Y+c^Xa^Y.$$

(等價於 $a^{X+Y}+b^{X+Y}+c^{X+Y}\geq a^Xc^Y+b^Xa^Y+c^Xb^Y$).

證明 (兩種):

(1) 依排序不等式 $\begin{cases} a^X \geq b^X \geq c^X \\ a^Y \geq b^Y \geq c^Y \end{cases}$, 順序和最大, 得證。

(2) 排序, 令 $b \geq c \geq a$ (其他 5 種同理, 以後雷同), 則

$$\begin{aligned}
&(a^{X+Y}+b^{X+Y}+c^{X+Y})-(a^Xb^Y+b^Xc^Y+c^Xa^Y)\\
&=a^X(a^Y-b^Y)+b^X(b^Y-c^Y)+c^X(c^Y-a^Y)\\
&=a^X(a^Y-c^Y)+a^X(c^Y-b^Y)+b^X(b^Y-c^Y)+c^X(c^Y-a^Y)\\
&=(b^Y-c^Y)(b^X-a^X)+(c^Y-a^Y)(c^X-a^X)\geq 0.
\end{aligned}$$

故成立。

今看下面例子:

例 (一) $a^5c+b^5a+c^5b \geq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b$

證明: 令 $a \geq c \geq b$ (兩列之排序不等式失效)。

$$\begin{aligned}
\text{則左}-\text{右}&=ca^3(a^2-b^2)+ab^3(b^2-c^2)+bc^3(c^2-a^2)\\
&=ca^3(a^2-c^2)+ca^3(c^2-b^2)+ab^3(b^2-c^2)+bc^3(c^2-a^2)\\
&=c(a^2-c^2)(a^3-c^2b)+a(c^2-b^2)(a^2c-b^3)\geq 0.
\end{aligned}$$

※ 同理可知 $a^5b+b^5c+c^5a \geq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b$, 故推廣指數得

定理 B: $\sum(X+Y,Z,0) \geq \sum(X,Y,Z)$ $(Z>0)$ 可分割 (Q 型)

※ $Z=0$ 即定理 A, 即

$$\begin{cases}
a^{X+Y}b^Z+b^{X+Y}c^Z+c^{X+Y}a^Z \geq a^Xb^Yc^Z+b^Xc^Ya^Z+c^Xa^Yb^Z\\
a^{X+Y}c^Z+b^{X+Y}a^Z+c^{X+Y}b^Z \geq a^Xc^Yb^Z+b^Xa^Yc^Z+c^Xb^Ya^Z.
\end{cases}$$

※ 上兩式可交叉。亦即交叉之後, 不等式仍然成立, 請見下例。

舉列說明:

例 (二) 令 $X=3$, $Y=2$, $Z=1$, 則 $\sum(5,1,0) \geq \sum(3,2,1)$, 可分割爲

$$\begin{cases}
a^5b+b^5c+c^5a \geq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b\\
a^5c+b^5a+c^5b \geq a^3c^2b+b^3a^2c+c^3b^2a,
\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}
a^5c+b^5a+c^5b \geq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b\\
a^5b+b^5c+c^5a \geq a^3c^2b+b^3a^2c+c^3b^2a.
\end{cases}$$

系: $\sum(X+Y+Z,0,0) \geq \sum(X+Y,Z,0) \geq \sum(X,Y,Z)$ $(Z>0)$ 可分割。

※ 前兩式 (P 型), 後兩式 (Q 型)。

舉列說明:

例 (三) 令 $X=4$, $Y=3$, $Z=2$, 則 $\sum(9,0,0)\geq\sum(7,2,0)\geq\sum(4,3,2)$ 可分割如下:

$$\begin{cases} a^9+b^9+c^9\geq a^7b^2+b^7c^2+c^7a^2\geq a^4b^3c^2+b^4c^3a^2+c^4a^3b^2\\ a^9+b^9+c^9\geq a^7c^2+b^7a^2+c^7b^2\geq a^4c^3b^2+b^4a^3c^2+c^4b^3a^2.\end{cases}$$

今再看下面例子:

例 (四) $a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\geq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b$

證明: 令 $c\geq b\geq a$

$$\begin{aligned} \text{則左}-\text{右}&=a^3b^2(a-c)+b^3c^2(b-a)+c^3a^2(c-b)\\ &=a^3b^2(a-b)+a^3b^2(b-c)+b^3c^2(b-a)+c^3a^2(c-b)\\ &=a^2(c-b)(c^3-ab^2)+b^2(b-a)(bc^2-a^3)\geq 0.\end{aligned}$$

故推廣指數得

定理 C: $\sum(X+Z,Y,0)\geq\sum(X,Y,Z)$ $(Z>0)$ 可分割 (Q 型), 即

$$\begin{cases} a^{X+Z}b^Y+b^{X+Z}c^Y+c^{X+Z}a^Y\geq a^Xb^Yc^Z+b^Xc^Ya^Z+c^Xa^Yb^Z\\ a^{X+Z}c^Y+b^{X+Z}a^Y+c^{X+Z}b^Y\geq a^Xc^Yb^Z+b^Xa^Yc^Z+c^Xb^Ya^Z.\end{cases}$$

系: $\sum(X+Y+Z,0,0)\geq\sum(X+Z,Y,0)\geq\sum(X,Y,Z)\quad(Z>0)$ 可分割。前兩式 (P 型), 後兩式 (Q 型)。

舉例說明:

例 (五) 令 $X=4$, $Y=3$, $Z=2$ 則 $\sum(9,0,0)\geq\sum(6,3,0)\geq\sum(4,3,2)$ 可分割成

$$\begin{cases} a^9+b^9+c^9\geq a^6b^3+b^6c^3+c^6a^3\geq a^4b^3c^2+b^4c^3a^2+c^4a^3b^2\\ a^9+b^9+c^9\geq a^6c^3+b^6a^3+c^6b^3\geq a^4c^3b^2+b^4a^3c^2+c^4b^3a^2.\end{cases}$$

※ 附件的三列排序不等式可直接導出 $a^9+b^9+c^9\geq a^4b^3c^2+b^4c^3a^2+c^4a^3b^2$

今再看下面例子

例 (六) $a^6b^4c^2+b^6c^4a^2+c^6a^4b^2\geq a^5c^4b^3+b^5a^4c^3+c^5b^4a^3$.

證明: 依算幾不等式得

$$\begin{cases} a^6b^4c^2+b^6c^4a^2\geq 2b^5a^4c^3\\ b^6c^4a^2+c^6a^4b^2\geq 2c^5b^4a^3\\ c^6a^4b^2+a^6b^4c^2\geq 2a^5c^4b^3,\end{cases}$$

三式相加, 得證。

故推廣指數得

定理 D: $\sum(X,Y,Z)\geq\sum\left(\frac{X+Y}{2},\frac{X+Z}{2},\frac{Y+Z}{2}\right)$ 可分割 (Q 型).

定理 E: $\sum(X,Y,Z)\geq\sum(r,r,r)$ 可分割 $\left(r=\frac{X+Y+Z}{3}\right)$ (P 型).

證明: 由算幾不等式易得。

舉例說明: 令 $X=3$, $Y=2$, $Z=1$ 則 $\sum(3,2,1)\geq\sum(2,2,2)$ 可分割成

$$\begin{cases} a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b\geq 3a^2b^2c^2 \\ a^3c^2b+b^3a^2c+c^3b^2a\geq 3a^2b^2c^2, \end{cases}$$

由以上諸定理得。

本定理:

$$\sum(X+Y+Z,0,0)\geq\begin{cases}\sum(X+Y,Z,0)\\ \sum(X+Z,Y,0)\end{cases}\geq\sum(X,Y,Z)$$
$$\geq\sum\left(\frac{X+Y}{2},\frac{X+Z}{2},\frac{Y+Z}{2}\right)\geq\sum(r,r,r)$$

$(Z>0)$ (P,Q 型)

舉例說明: 令 $X=6$, $Y=4$, $Z=2$ 則

$$\sum(12,0,0)\geq\begin{cases}\sum(10,2,0)\\ \sum(8,4,0)\end{cases}\geq\sum(6,4,2)\geq\sum(5,4,3)\geq\sum(4,4,4)$$

可分割成

例 (七)

$$\begin{cases} a^{12}+b^{12}+c^{12}\geq a^{10}b^2+b^{10}c^2+c^{10}a^2\geq a^6b^4c^2+b^6c^4a^2+c^6a^4b^2 \\ \geq a^5b^4c^3+b^5c^4a^3+c^5a^4b^3\geq 3a^4b^4c^4, \\ \\ a^{12}+b^{12}+c^{12}\geq a^{10}c^2+b^{10}a^2+c^{10}b^2\geq a^6c^4b^2+b^6a^4c^2+c^6b^4a^2 \\ \geq a^5b^4c^3+b^5c^4a^3+c^5a^4b^3\geq 3a^4b^4c^4, \end{cases}$$

(四) 三元分割之綜合分析:

令 $(X,Y,Z)\geq(X',Y',Z')$.

§1: $X=X'$, 不可分割

(1) (P 型) 明顯不可能。

(2) 此時 $Y>Y'$, $Z<Z'$, $Y+Z=Y'+Z'$,

而 $a^Xb^Yc^Z+b^Xc^Ya^Z+c^Xa^Yb^Z\geq a^{X'}b^{Y'}c^{Z'}+b^{X'}c^{Y'}a^{Z'}+c^{X'}a^{Y'}b^{Z'}$ 不成立,

因只要 a 夠大, $b<c$ 即找到反例。

故 (Q 型) 不可能。

由 (1)、(2) 得證。

§2: $X>X'$.

(1) $Y=Y'$, 可分割

先化簡成 $\sum(X-Z,Y-Z,0)\geq\sum(X'-Z,Y'-Z,Z'-Z)$.

再令 $A=X'-Z$, $B=Y'-Z$, $C=Z'-Z$,

得 $\sum(A+C,B,0)\geq\sum(A,B,C)$。依定理 C 得證。

(2) $Y\neq Y'$

(A) $Z=Z'$, 則不可分割。

今以 $(6,3,0)>(5,4,0)$ 爲例

即 $(a^6b^3+b^6c^3+c^6a^3)\geq(a^5b^4+b^5c^4+c^5a^4)$,

只要令 c 很小且 $a<b$, 則明顯的找到反例, 使其不成立, 其他情況雷同。

(B) $Z\neq Z'$

(i) $X=X'+Y'$ 且 $Z=0$ (此時 $Y=Z'$)

它可化成 $\sum(X'+Y',Z',0)\geq\sum(X',Y',Z')$,

依定理 B, 可分割。

(ii) 某些特殊型或者可分割。

如 $\sum(10,8,2)\geq\sum(9,6,5)$ 依定理 D, 可分割。

如 $\sum(12,6,3)\geq\sum(7,7,7)$ 依定理 E, 可分割。

(iii) 其他無法確定

如 $\sum(10,6,1)\geq\sum(8,5,4)$

而 $a^{10}b^6c+b^{10}c^6a+c^{10}a^6b\geq a^8b^5c^4+b^8c^5a^4+c^8a^5b^4$ 根本束手無策。

(五) 附件: 三列之排序不等式

三實數列:

$$\begin{cases}a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\\ b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n\\ c_1\geq c_2\geq\cdots\geq c_n\end{cases},\quad \text{則順序和不小於亂序和。}$$

即 $\sum\limits_{i=1}^n a_i\cdot b_i\cdot c_i\geq\sum\limits_{i=1}^n a_{P_i}\cdot b_{Q_i}\cdot c_{R_i}$.

其中 $\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}=\{Q_1,Q_2,\ldots,Q_n\}=\{R_1,R_2,\ldots,R_n\}=\{1,2,\ldots,n\}$.

§1: 應用

(1) 直接導出例 (三)、例 (五) 之 $a^9+b^9+c^9\geq a^4b^3c^2+b^4c^3a^2+c^4a^3b^2$

(2) 推廣至 n 元 3 指數 (上式爲 3 元, 3 指數), 即由

$$\begin{cases} A_1^X\geq A_2^X\geq A_3^X\geq\cdots\geq A_n^X\\ A_1^Y\geq A_2^Y\geq A_3^Y\geq\cdots\geq A_n^Y\\ A_1^Z\geq A_2^Z\geq A_3^Z\geq\cdots\geq A_n^Z,\end{cases}$$

得 $A_1^R+A_2^R+\cdot+A_n^R\geq A_1^XA_2^YA_3^Z+A_2^XA_3^YA_4^Z+A_3^XA_4^YA_5^Z+\cdots+A_{n-1}^XA_n^YA_1^Z+A_n^XA_1^YA_2^Z$ (P 型) $R=X+Y+Z$。

※ 上式爲 $\sum(X+Y+Z,0,0,\ldots,0)\geq\sum(X,Y,Z,0,0,\ldots,0)$ 之分割後之代表式。(但要透過 n 元齊次對稱式分割之輪換子群, 以後若討論 4 元以上時, 再詳細說明)

§2: 證明

(1) 取 $n=5$, 而 $a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3+a_4b_4c_4+a_5b_5c_5\geq a_1b_2c_3+a_2b_4c_5+a_3b_1c_4+a_4b_5c_1+a_5b_3c_2$ 記成

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&5&3\\3&5&4&1&2\end{bmatrix}$$ (省略不定元)。

※ 其和爲 5 行之每行相乘後相加。

(2) Lemma (對調原理)

若 $A\geq B$, $C\geq D$ 則將 $AD+BC$ 中 C,D 之對調後會遞增, 因爲 $AD+BC\leq AC+BD$, 可推廣如下:

(a) 若 $A\geq B$, $C\geq D$, $E\geq F$則將 $ACF+BDE$ 之 E,F 對調後會遞增。
因爲 $(ACE+BDF)-(ACF+BDE)=(AC-BD)(E-F)\geq 0$。

(b) 若 $A\geq B$, $C\geq D$, $E\geq F$, $G\geq H$ 將 $ACFH+BDEG$ 之 FH 和 EG 對調一樣會遞增 (同理)。記爲

$$\begin{bmatrix}A&B\\C&D\\F^v&E^v\\H^v&G^v\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}A&B\\C&D\\E&F\\G&H\end{bmatrix}$$ (v 表對調之項)。

※ 也許抽象成「大·小+小·大 $\leq$ 大·大+小·小」更易了解。

(3) 數學歸納法

以上矩陣、引理、歸納法三箭齊發, 即可中靶心, 省略過程。

參考資料

1. 吳建生。從算幾不等式到齊次對稱不等式。教育部高中數學科網站電子報, 67期。
2. 吳建生。大三元齊次對稱輪換不等式。教育部高中數學科網站電子報, 90期。
3. 吳建生。小三元齊次輪換不等式。教育部高中數學科網站電子報, 99期。
4. 嚴鎮軍主編。高中數學競賽教程。
5. Hardy 著, *Inequality* 之 Muirhead 定理。

—本文作者爲高雄女中退休教師—